Material docente del curso de Mecánica de Medios Continuos.

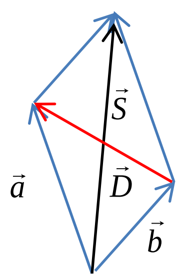
Facultad de Ingeniería_Medellín

Profesor: Francisco Javier Vélez Hoyos

CÁLCULO TENSORIAL

Vectores

- **Suma y resta** (regla del paralelogramo)

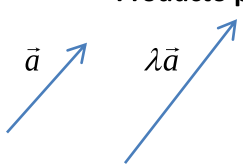


Regla del paralelogramo

Regla del triangulo

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$$

- **Producto por escalar**



- **Producto escalar**

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$si \quad \vec{a} = \vec{b} = \vec{a}.\vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\|.1$$
$$\Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$$

- **Vector unitario** (versor)

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \qquad \|\hat{a}\| = 1$$

- **Proyección escalar**

$$proy_{\vec{b}}\vec{a} = \|\vec{a}\|\cos\theta\,\vec{b} = \|\vec{a}\|\cos\theta\,\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \|\vec{a}\|\cos\theta\,\frac{\|\vec{b}\|\hat{b}}{\vec{b}} = \frac{\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{2}} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\right)\vec{b}$$

$$comp_{\ \vec{b}}\vec{a} = \left\|proy_{\vec{b}}\vec{a}\right\| = \|\vec{a}\|\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

- **Vectores ortogonales** (perpendiculares)

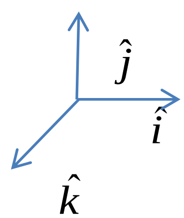
  $\vec{a}.\vec{b} = 0$

- **Producto vectorial**

  $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (anticonmutativos)

$A = \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|sen\theta$ (área del paralelogramo)”

$$si\ \vec{a} \parallel \vec{b} \quad : \vec{a}\times\vec{b} = 0 \begin{cases} \hat{i}\times\hat{i} \\ \hat{j}\times\vec{j} \\ \hat{k}\times\vec{k} \end{cases}$$



- **Triple producto escalar**

$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{c}\left(\vec{a}.\vec{b}\right) : v$ Volumen del paralelepípedo

- **Triple producto vectorial**

$$\vec{w} = \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$$

- **Vectores en el sistema de coordenadas cartesianas**

$$\vec{a} = \vec{a}_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Suma: $\vec{a}+\vec{b} = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right) + \left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\right) = \left(a_x + b_x\right)\hat{i} + \left(a_y + b_y\right)\hat{j} + \left(a_z + b_z\right)\hat{k}$

- **Producto escalar:** $\vec{a}.\vec{b}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right).\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$\Rightarrow \|\vec{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Cosenos y ángulos directores

$$\vec{v}.\hat{i}=\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{v}.\hat{i}}{\|\vec{v}\|}=\hat{v}.\hat{i}$$

- **Producto vectorial**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\hat{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}$$

- **Triple producto escalar**

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{pmatrix}$$

T1) Dados los puntos A(1,3,1), B(2,-1,1), C(0,1,3) y D(1,2,4) Hallar

1- Area del paralelogramo definido por AB y AC
2- Volumen del paralelogramo definido por AB, AC y AD
3- Vector proyección de AB sobre BC

Convenio de suma de Einstein

Vector:
$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\Rightarrow\vec{a}=a_1\hat{e}_1+a_2\hat{e}_2+a_3\hat{e}_3$$
$$\Rightarrow\vec{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\hat{e}_i:\quad \vec{a}=a_i\hat{e}_i\quad\left(i=1,2,3\right)$$

Notación Indicial

-Los ejes del sistema de coordenadas se representan como x_i

-Los componentes de un vector $(\vec{a})_j = a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (i = 1,2,3)$

-Vector unitario: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \rightarrow \hat{a}_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{a_j a_j}} \quad (i,\, j = 1,2,3) \quad \dfrac{a_i}{\sqrt{a_k a_k}}$

-Producto escalar

Subíndices libres: Aparece una vez en la expresión

Ej: El número de subíndices libres indica el orden del tensor

Subíndices Mudos: Aparece dos veces indicando suma (no puede aparecer más de dos veces)

Producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i \quad (i = 1,2,3)$

Ej) Simplificar la expresión (contraer con ayuda de la notación indicial)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{1j}x_j = b_1 \\ a_{2j}x_j = b_2 \\ a_{3j}x_j = b_3 \end{cases} \rightarrow a_{ij}x_j = b_i$$

T2) Expandir la expresión: $A_{ij}x_i x_j \quad (i,\, j = 1,2,3)$

- **Delta de Kronecker** (operador de sustitución)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

- Propiedades

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 \\ \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} : I$$

- Sustitución de índices

$$\delta_{ij}v_i = \delta_{1j}v_1 + \delta_{2j}v_2 + \delta_{3j}v_3$$

$$\left.\begin{array}{r} j=1 \Rightarrow \delta_{ij}v_i = \delta_{11}v_1 + \delta_{21}v_2 + \delta_{31}v_3 = v_1 \\ j=2 \Rightarrow \delta_{ij}v_i = v_2 \qquad\qquad\qquad\quad \\ j=3 \Rightarrow \delta_{ij}v_i = v_3 \qquad\qquad\qquad\quad \end{array}\right\} \delta_{ij}v_1 = v_j$$

T3) Calcular

1) $\delta_{ii}\delta_{jj}$

2) $\delta_{\alpha 1}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta 1}$

- **Símbolo de denotación**

$$\varepsilon_{ijk} \begin{cases} 1\, si\ (i, j, k)\varepsilon \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1\, si\ (i, j, k)\varepsilon \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \\ \qquad 0\ para\ el\ resto\ de\ casos \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-j)$$

$$p.vectorial\ \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

$$de\ base$$

T4) Probar que: $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i$

Tensores de orden superior

Diádicas

El producto diádico (tensorial) de 2 vectores genera un tensor de 2° orden:

$$\vec{u}\vec{v} \equiv \vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{\vec{A}} =: \mathrm{A}$$

-En el sistema cartesiano:

$$\vec{\vec{A}} = \vec{u} \otimes \vec{v} = (u_i\hat{e}_i) \otimes (v_j\hat{e}_j) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$= u_i v_j (\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j)$$

$$\vec{\vec{A}} = A_{ij}(\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j)$$

Tensor componentes base

Representación matricial:

$$\left(\vec{\vec{A}}\right)_{ij} = A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

-Orden de un tensor: Dado por el número de subíndices libres

-Número de componentes de un tensor: Dado por el máximo valor del rango del subíndice, elevado al número de subíndices libres

Ej: Orden de los tensores: $v_i, \Phi_{ijk}, f_{ijj}, \varepsilon_{ij}, \mathbb{C}_{ijkl}$

- **Operaciones con tensores**

Dados 2 tensores de 2° orden $\vec{\vec{A}}$ y $\vec{\vec{B}}$ se define:

Suma: $\vec{\vec{C}} = \vec{\vec{A}} + \vec{\vec{B}} = \vec{\vec{B}} + \vec{\vec{A}}$

Componentes: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

- **Producto por escalar**

$$\vec{\vec{D}} = \lambda \vec{\vec{A}} \xrightarrow{Comp} D_{ij} = \lambda A_{ij}$$

- **Producto escalar**

$$\vec{y} = \vec{\vec{A}} \cdot \vec{x} = \left(A_{ij}\hat{e}_i \otimes \hat{e}j\right) \cdot \left(x_k \hat{e}_k\right)$$
$$= A_{ij} x_k \delta_{jk} \hat{e}_i = A_{ij} x_j \hat{e}_i \quad \left(A_{ik} x_k \hat{e}_i\right)$$
$$= y_i \hat{e}_i \quad \left(vector\right) = \vec{y}$$

2 Tensores (2° orden)

$$\vec{\vec{C}} = \vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{B}} = (A_{ij}\hat{e}_i \otimes \underbrace{\hat{e}_j) \cdot (B_{kl}\hat{e}_k}_{\delta_{jk}} \otimes \hat{e}_l)$$
$$= A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_l$$
$$= A_{ij} B_{jl} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_l \neq B_{ij} A_{jl} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j : \vec{\vec{B}} \cdot \vec{\vec{A}} \quad \text{(no conmutativo)}$$
$$= C_{il} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_l \quad \text{(tensor de 2° orden)}$$

- **Doble producto escalar**

$$\vec{\vec{A}} = \vec{c}\otimes\vec{d},\ \vec{\vec{B}} = \vec{u}\otimes\vec{v}$$

Doble contracción (:)

$$\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}} = (\vec{c}\otimes\vec{d}):(\vec{u}\otimes\vec{v}) = (\vec{c}\cdot\vec{u})(\vec{d}\cdot\vec{v}):\ \text{escalar}$$

$$\text{en componentes: } \vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}} = (A_{ij}\,\overbrace{\hat{e}_i\otimes\underbrace{\hat{e}_j):(B_{kl}\hat{e}_k\otimes\hat{e}_l}_{\delta_{jl}}}^{\delta_{ik}})$$

$$\begin{aligned}
&= A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\\
&= A_{ij}B_{il}\delta_{jl}\\
&= A_{ij}B_{ij} \quad = \vec{\vec{B}}:\vec{\vec{A}} \quad \text{conmutativo}\\
&= \lambda\ (escalar)
\end{aligned}$$

- **Doble contracción** $(\cdot\cdot)$:

$$\vec{\vec{A}}\cdot\cdot\vec{\vec{B}} = (\vec{c}\otimes\vec{d})\cdot\cdot(\vec{u}\otimes\vec{v}) = (\vec{c}\cdot\vec{v})(\vec{d}\cdot\vec{u}):escalar$$

$$\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}} = (A_{ij}\underbrace{\hat{e}_i\otimes\overbrace{\hat{e}_j)\cdot\cdot(B_{kl}\hat{e}_k}^{\delta_{jk}}\otimes\hat{e}_l}_{\delta_{il}})$$

$$\begin{aligned}
&= A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}\delta_{il}\\
&= A_{ij}B_{jl}\delta_{il}\\
&= A_{ij}B_{ji} \qquad = \vec{\vec{B}}\cdot\cdot\vec{\vec{A}}\,(conmutativo)\\
&= \gamma(escalar)
\end{aligned}$$

T5) Si los componentes de $\vec{\vec{\varepsilon}}\ y\ \vec{\vec{T}}$ son $\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 6\end{bmatrix}, T_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$ $hallar\ T:\varepsilon, T\cdot\cdot\varepsilon$

- En general $\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}} \neq \vec{\vec{A}}\cdot\cdot\vec{\vec{B}},$ excepto si alguno es simétrico

T6) Desarrollar y simplificar la expresión:

$\vec{\vec{A}}:(\vec{x}\otimes\vec{x})$ para los casos

a) $A_{ij}=A_{ji}$ ($\vec{\vec{A}}$ simétrica) y b) $A_{ij}=-A_{ji}$ ($\vec{\vec{A}}$ antisimétrico)

- Doble contracción de T de 4° orden y de 2° orden

$$(\mathbb{C}_{ijkl}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j\otimes\overbrace{\hat{e}_k\otimes\hat{e}_l):(\varepsilon_{pq}\hat{e}_p}^{\delta_{kp}}\otimes\hat{e}_q)$$

$$\delta_{eq}$$

$$=\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{pq}\delta_{kp}\delta_{lq}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j$$

$$=\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j \quad \text{(T 2° orden)}$$

T7) Probar que: $\vec{a}\cdot\vec{A}\cdot\vec{b}=\vec{\vec{A}}(\vec{a}\otimes\vec{b})$

- Producto vectorial de tensor y vector

$$\vec{\vec{A}}\times\vec{X}=(A_{ij}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j)\times(x_k\hat{e}_k)$$

$$=\varepsilon_{jkl}A_{ij}x_k\hat{e}_i\otimes\hat{e}_l \quad \text{(T. 2° orden)}$$

- Representación de los componentes de un tensor de 2° orden

$$\vec{\vec{T}}=T_{ij}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j=T_{11}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_1+T_{12}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_2+T_{13}\hat{e}_1\otimes\hat{e}_3$$

$$+T_{21}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_1+T_{22}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_2+T_{23}\hat{e}_2\otimes\hat{e}_3$$

$$+T_{31}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_1+T_{32}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_2+T_{33}\hat{e}_3\otimes\hat{e}_3$$

- Proyección sobre la base $\hat{e}_k$

$$\vec{\vec{T}}.\hat{e}_k=T_{ij}\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j\cdot\hat{e}_k=T_{ij}\hat{e}_i\delta_{jk}=T_{ik}\hat{e}_i$$

$$=T_{1k}\hat{e}_1+T_{2k}\hat{e}_2+T_{3k}\hat{e}_3$$

Resultan 3 vectores tensores

$$\vec{\vec{T}}\cdot\hat{e}_k=T_{ik}\hat{e}_i\Rightarrow\begin{cases}k=1: T_{i1}\hat{e}_i=T_{11}\hat{e}_1+T_{21}\hat{e}_2+T_{31}\hat{e}_3=\vec{t}(\hat{e}_1)\\ k=2: T_{i2}\hat{e}_i=T_{12}\hat{e}_1+T_{22}\hat{e}_2+T_{32}\hat{e}_3=\vec{t}(\vec{e}_2)\\ k=3: T_{i3}\hat{e}_i=T_{13}\hat{e}_1+T_{23}\hat{e}_2+T_{33}\hat{e}_3=\vec{t}(\hat{e}_3)\end{cases}$$

$$\vec{t}^{(1)}=:\vec{t}^{(\hat{e}_1)}=\vec{\vec{T}}\cdot\hat{e}_1$$

$$t_i^{(\hat{e}_1)} = T_{ij}\hat{n}_i^{(1)} = T_{ij}e_i^{(1)} = T_{ij}\hat{e}_1$$

En componentes:
$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix}$$

Componente tangenciales *Componentes normales*

Propiedades de los tensores de 2° orden

- **Tensor simétrico**

  $\vec{\vec{A}}$ es simétrico si $\vec{\vec{A}} = \vec{\vec{A}}^T \Rightarrow A_{ij} = A_{ji}$

  Matricialmente $A^{sim} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ (6 componentes independientes)

- Propiedad

  $$A_{ij} = A_{ji}$$
  $$A_{ij} + A_{ij} = A_{ij} + A_{ji}$$
  $$2A_{ij} = A_{ij} + A_{ji}$$
  $$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) \Rightarrow \vec{\vec{A}}^{sim} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{A}} + \vec{\vec{A}}^T\right)$$

- Tensor anti simétrico

  $\vec{\vec{A}}$ es antisimétrico si $\vec{\vec{A}} = -\vec{\vec{A}}^T \Rightarrow A_{ij} = -A_{ji}$

  $A^{anti} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$ (3 componentes independientes)

- Propiedad

  $$A_{ij} + A_{ij} = A_{ij} - A_{ij}$$
  $$2A_{ij} = A_{ij} - A_{ji}$$
  $$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) \Rightarrow \vec{\vec{A}}^{anti} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{A}} - \vec{\vec{A}}\right)$$

De 1 y 2: $\vec{\vec{A}}^{sim} + \vec{\vec{A}}^{anti} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{A}} + \vec{\vec{A}}^{T}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{A}} - \vec{\vec{A}}^{T}\right) = \vec{\vec{A}}$

"Todo tensor de 2° orden puede descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica"

T8) Si $\vec{\vec{\sigma}}$ es simétrica y $\vec{\vec{\omega}}$ es antisimétrico, probar que $\vec{\vec{\sigma}}:\vec{\vec{\omega}}=0$

- **Traza de un tensor**

$$Tr\left(\vec{\vec{A}}\right) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

Es un invariante: no depende del sistema de referencia

- **Tensor identidad de 2° orden**

$$\vec{\vec{1}} = \delta_{ij}\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \Rightarrow \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\vec{\vec{1}} \cdot \vec{\vec{A}} = \left(\delta_{ij}\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j\right) \cdot \left(A_{kl}\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l\right) = \delta_{ij} A_{kl} \delta_{jk}$
- $Tr\left(\vec{\vec{1}}\right) = 3 \qquad \hat{e}_i \otimes \hat{e}_l = A_{il}\hat{e}_i \otimes \hat{e}_l = \vec{\vec{A}}$

T9) Demuestre que $\vec{\vec{T}} : \vec{\vec{1}} = Tr\left(\vec{\vec{T}}\right)$

- **Determinante:** $\left|\vec{\vec{A}}\right| = \left|A_{ii}\right| = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$
- **Inversa:** $si \left|\vec{\vec{A}}\right| \neq 0 \Rightarrow \vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{A}}^{-1} = \vec{\vec{A}}^{-1} \cdot A = 1$

Con $\left(\vec{\vec{A}}^{-1}\right)_{ij} = \left(A_{ij}^{-1}\right)$

- **Modulo de un tensor**

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_i v_i} \qquad \left\|\vec{\vec{T}}\right\| = \sqrt{\vec{\vec{T}} \cdot \vec{\vec{T}}} = \sqrt{T_{ij} T_{ij}}$$

- **Tensor ortogonal**

$$\vec{\vec{Q}}\, tq\, \vec{\vec{Q}}^{T} = \vec{\vec{Q}}^{-1} \Rightarrow Q \cdot Q^{T} = \vec{\vec{1}}$$

- **Transformación ortogonal de vectores**

  Dados $\vec{a}.\vec{b}$ *vectores arbitrarios*

La transformación ortogonal:

$$\tilde{\vec{a}} = \vec{\vec{Q}} \cdot \vec{a} \qquad \tilde{\vec{b}} = \vec{\vec{G}} \cdot \vec{b}$$

$$\tilde{\vec{a}} \cdot \tilde{\vec{b}} = \left(\vec{\vec{Q}} \cdot \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{\vec{Q}} \cdot \vec{b}\right) = (\vec{a} \cdot \underbrace{\vec{\vec{Q}}^{T}) \cdot (\vec{\vec{Q}}}_{\vec{\vec{1}}} \cdot \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{\vec{1}} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$si\ \tilde{\vec{b}} = \tilde{\vec{a}} \Rightarrow \tilde{\vec{a}} \cdot \tilde{\vec{a}} = \left\|\vec{a}^{1}\right\|^{2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left\|\vec{a}\right\|^{2}$$

$$\vec{b}^{1} = \vec{a}^{1} \Rightarrow \vec{a}^{1} \cdot \vec{a}^{1} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left\|\vec{a}\right\|^{2}$$

Ley de transformación de los componentes de un tensor

$$i, i' = 1, 2$$

$$(\vec{v})_{i'} = \begin{bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta \\ -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} =:$$

$$v_{i'}$$

$$\Rightarrow v_i = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{bmatrix} =:$$

$$Q_{ij}^{-1} = Q_{ji} = Q_{ij}^{T} \Rightarrow \vec{\vec{Q}} : ortogonal$$

- Deducción y transformación de vectores y tensores 3D

(17-18: A, B, C)

$$\vec{v}^{1} = \vec{\vec{Q}} \vec{V} \qquad \vec{\vec{T}}^{1} = \vec{\vec{Q}} \cdot \vec{\vec{T}} \cdot \vec{\vec{Q}}^{T}$$

-Hallar la M. de transformación del sistema $x_2\ al\ x_{i'}^{1}$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \left(\cos \pi/2 - \alpha\right) & \cos \pi/2 \\ \cos\left(\alpha + \pi/2\right) & \cos\alpha & \cos \pi/2 \\ \cos \pi/2 & \cos \pi/2 & \cos 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T10) $\left(\vec{\vec{T}}\right)_{ij} = T_{ij} = T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} si\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$

Sea en Xi Hallar T'

$$\hat{e}^1 = \vec{\vec{A}} \cdot \hat{e}$$

$$\hat{e}_i^{'} = A_{ij}\hat{e}_j \ \{\hat{e}' = \vec{\vec{A}} \quad \vec{\vec{A}}^T = \vec{\vec{A}}^{-1} \qquad \frac{2D}{A_{ij} =}[\ \ ]$$

Op. Ortogonal

$$\Rightarrow \vec{v}' = \vec{\vec{A}} \cdot \vec{V} \quad \{v_i^{'} = A_{ij}v_j$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_i = \sphericalangle\left(x_i^{'}, x_1\right) \\ \beta_i = \sphericalangle\left(x_i^{'}, x_2\right) \\ \gamma_i = \sphericalangle\left(x_i^{'}, x_3\right) \end{matrix}\right\}$$

- Cosenos directos

$\|\hat{e}_1\| \to 1$

$$\left.\begin{matrix} \hat{e}_1^{'} = \left(c_{\alpha 1}\hat{e}_1 + c_{\beta 1}\hat{e}_2 + c_{\gamma 1}\hat{e}_3\right) \\ \hat{e}_2^{'} = \left(c_{\alpha 2}\hat{e}_1 + c_{\beta 2}\hat{e}_2 + c_{\gamma 2}\hat{e}_3\right) \\ \hat{e}_3^{'} = \left(c_{\alpha 3}\hat{e}_1 + c_{\beta 3}\hat{e}_2 + c_{\gamma 3}\hat{e}_3\right) \end{matrix}\right\} \hat{e}_i^{'} = Q_{ij} \qquad Q_{ij} = \begin{bmatrix} c_{\alpha 1} & c_{\beta 1} & c_{\gamma 1} \\ c_{\alpha 2} & c_{\beta 2} & c_{\gamma 2} \\ c_{\alpha 3} & c_{\beta 3} & c_{\gamma 3} \end{bmatrix}$$

*Similar/

$$\hat{e}_i = Q_{ji}\hat{e}_j^{'} \Rightarrow \vec{\vec{Q}}^T = \vec{\vec{Q}}^{-1}$$

$$\Rightarrow V_i^{'} = Q_{ij}V_i \left\{ \vec{V}^{'} = \vec{\vec{Q}} \cdot \vec{V} \right. \text{ ley de tranformación de tensor de primer orden}$$

TENSIONES

Introducción

Equilibrio

Fuerza interna *Desplaz. Deformación*

$$\vec{F} = -\vec{F}_{ei} = k\vec{d} \quad \therefore \quad \vec{F}\vec{e}' = -k\vec{d}$$

F.Elastica *Rigidez*

CILINDRO A TRACCIÓN

Propiedad intensiva *Propiedad extensiva*

$$\vec{\vec{\sigma}} = \frac{\vec{F}}{\vec{A}}$$

$$F = \frac{EA\alpha}{l} \Rightarrow \sigma = \frac{E}{l}\delta = E\varepsilon$$

2 TENSION

- Tensión o esfuerzo

Medida de la intensidad de la fuerza (expresada como la fuerza distribuida) por unidad de área, dentro de un cuerpo o sobre su contorno

Un medio continuo se considera libre de esfuerzos si las únicas acciones que presenta son las fuerzas interatómicas necesarias para mantener unidas las partículas del mismo.

$\vec{b}$: Fuerza por unidad de masa

$\vec{t}$: Fuerza por unidad de superficie (tracción)

- Fuerzas de cuerpo: Fuerzas a distancia distribuidas en el volumen del m.c Ej: Fuerza gravitacional, Fuerza inerciales, Fuerza E.M
- Fuerzas de superficie: Fuerzas que actúan sobre el contorno de volumen de material considerado, ejercidas por el contacto de las partículas del contorno con el exterior

$$\vec{f}_v = \int_v \rho\vec{b}(\vec{x},t)\,dv \quad \vec{f}_s = \int_{\partial v} \vec{t}(\vec{x},t)\,ds$$

Vector tracción (vector de esfuerzos o de tensión)

Postulados de Cauchy

1- El vector de tracción que actúa en un pto material p. de un m.c según un plano de normal $\hat{n}$, solo depende del punto y de la normal

2- Principio de acción-Reacción: El vector de tracciones en un punto P de un m.c, según un plano de normal $\hat{n}$, es igual y de sentido contrario al vector de tracciones en el mismo punto P según un plano de normal - $\hat{n}$

$$\vec{t}^{(\hat{n})}(\vec{x},\hat{n}) = -\hat{t}^{(-\hat{n})}(\vec{x},-\hat{n})$$

1-

a) Hallar $\alpha_1 \; y \; \alpha_2 ; d_1 \; y \; d_2$

b) $\begin{matrix} si \; m_1 = m_2, \quad k_1 = k_2 \\ hallar \; \alpha_1 / \alpha_2 ; \quad d_1 / d_2 \end{matrix}$

2- <u>La tracción en un punto de un M.C son como la figura...</u>

a) $\vec{t}^{(\hat{n})}$

b) En cual plano $\|\vec{t}\|^1$

$$\begin{array}{ccc} & & a \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2^b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \\ & c & \end{array}$$

$A = (1,00)$

$B = (1,10)$

$C = (0,01)$

$\vec{AB} = (1-1)(1-0)(0-0) \Rightarrow \vec{AB} = (0,1,0)$

$\vec{AC} = (0-1)(0-0)(1-0) \qquad \vec{AC} = (-1,0,1)$

COMPONENTES DE ESFUERZO σ_{ij}

$$\vec{t}^{(1)} = t_1^{(1)}\hat{e}_1 + t_2^{(1)}\hat{e}_2 + t_3^{(1)}\hat{e}_3$$

$$En \; gral : \vec{t}^{(i)} = t_j^{(i)}\hat{e}_j$$

$\sigma_{ij} =: t_j^{(i)}$ → *Componente de un T. de 2° orden*

σ_{ij} : Componente en la dirección del eje Xj del vector…

$\vec{t}^{\,(i)}$ Asociado a un plano cuya normal es paralela a Xi…

$$\vec{t}^{\,(1)} = \sigma_{ij}\hat{e}_j = \sigma_{11}\hat{e}_1 + \sigma_{12}\hat{e}_2 + \sigma_{13}\hat{e}_3$$

$$En\ gral : \boxed{\begin{aligned}\vec{t}^{\,(i)} &= \sigma_{ij}\hat{e}_j \\ &= \hat{n}_i \cdot \vec{\vec{\sigma}}\end{aligned}}$$

Multiplicando . por $\hat{e}_j$:
$$\begin{aligned}&\sigma_{ik}\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j = \vec{t}^{\,(i)} \cdot \hat{e}_j \\ &\Rightarrow \sigma_{ik}\delta_{kj} = \vec{t}^{\,(i)} \cdot \hat{e}_j \Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \vec{t}^{\,(i)} \cdot \hat{e}_j}\end{aligned}$$

$$* \ \hat{n}_i \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \hat{e}_i \cdot \sigma_{ki}\hat{e}_k \otimes \hat{e}_j = \delta_{ik}\sigma_{kj}\hat{e}_j = \sigma_{ij}\hat{e}_j$$

Tracción sobre una superficie arbitraria

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$s_i = s\hat{n} \cdot \hat{e}_i \begin{cases} s_1 = sn_1 \\ s_2 = sn_2 \\ s_3 = sn_3 \end{cases}$$

(proy. De s sobre el plano del s. de co..)

$$p\vec{p}^{\,'} = h$$

- Equilibrio de fuerzas (2° ley de newton)

$$\Rightarrow \vec{t}^{\,(i)} : \text{ valor medio de } \vec{t}^{\,(i)} \text{ en } s_i$$

$$\rho v\vec{b} + \vec{t}^{\,(\hat{n})}s - \vec{t}^{\,(1)}s_1 - \vec{t}^{\,(2)}s_2 - \vec{t}^{\,(3)}s_3 =$$

$$\Rightarrow \rho v\vec{b} + \vec{t}^{\,(\hat{n})}s - \vec{t}^{\,(1)}s_{n1} - \vec{t}^{\,(2)}s_{n2} - \vec{t}^{\,(3)}s_{n3} =$$

$$\Rightarrow \vec{t}^{\,(\hat{n})} = \frac{\rho v}{s}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{t}^{\,(1)}n_1 + \vec{t}^{\,(2)}n_2 + \vec{t}^{\,(3)}n_3$$

$$v = \tfrac{1}{3} sh, \quad \lim \vec{t}^{(\hat{n})} \Rightarrow \vec{t}^{(1)} n_1 + \vec{t}^{(2)} n_2 + \vec{t}^{(3)} n_3$$
$$h \Rightarrow 0$$
$$\therefore \vec{t}^{(\hat{n})} = \vec{t}^{(i)} n_i$$
$$pero: \vec{t}^{(i)} = \sigma_{ij} \hat{e}_j \Rightarrow \vec{t}^{(\hat{n})} = n_i \sigma_{ij} \cdot \hat{e}_j$$

$$\boxed{\vec{t}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \quad \vec{t}^{(\hat{n})}(\vec{x}, \hat{n}) = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}}(\vec{x}, \ldots)}$$

Con: $\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$,Tensor de tensiones (esfuerzos) de cand...

Nota : *Postulados de Cauchy*

$$\left.\begin{array}{r} \vec{t}^{(\hat{n})}\left(\vec{x}, \hat{n}\right) = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \\ \vec{t}^{(-\hat{n})}\left(\vec{x}, -\hat{n}\right) = -\hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \end{array}\right\} \vec{t}^{(\hat{n})}\left(\vec{x}, \hat{n}\right) = -\vec{t}^{(-\hat{n})}\left(\vec{x}, -\hat{n}\right)$$

Ej: Los componentes del tensor de tensiones en el punto P de un medio continuo son $\left\| \vec{t}^{(\ )} \right\|$ y su magnitud

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \text{Pa}$$

calcular el vector de tracción
en el punto P según b)
la dirección del plano ABC
de la figura a) la dirección
del (plano $x_2 x_3$) $\hat{e}_i$

A) $\vec{t}^{(\hat{n}1)} - \vec{t}^{(1)} = \sigma_{11} \hat{e}_1 + \sigma_{12} \hat{e}_2 + \sigma_{13} \hat{e}_3 = \ldots$

B) $AB = \langle -3, 2, 0 \rangle, \ \vec{AC} = \langle -3, 05 \rangle$

$$\vec{n} = A\vec{B} \times A\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{i} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 15\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\hat{n} = \frac{10\hat{i} + 15\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{361}}$$

$$\vec{t}^{\,(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{361}}(10\ i5 - 6)\begin{vmatrix} 8 & -4 & 1 \\ -4 & 3 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{vmatrix} = \ldots$$

REPRESENTACIÓN DEL ESTADO TENSORIAL DE UN PUNTO

Notación cientifica

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Notación ingenierial

Tampón normales

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{x} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{y} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{z} \end{vmatrix}$$

T. tangenciales cortantes

CRITERIO DE SIGNOS

$$\sigma_n = \vec{t} \cdot \hat{n} \begin{cases} \rangle o : tracción \\ \langle o : comprensión \end{cases}$$

Caras, liston (puentes) $\begin{cases} \text{tensiones normales: } \sigma_{ij} \ o\ \sigma_a \begin{cases} +(tracción) \\ -(comprensión) \end{cases} \\ \text{tensiones tangenciales: } \tau_{ab} \begin{cases} +: \text{sentido del eje } b \\ -: \text{ sentido del eje } b \end{cases} \end{cases}$

(falta algo)

a) Hallar $\sigma_{22} + q^{'}$ exista al menos un plano libre de tensiones.

b) Hallar la dirección de dicho plano $\vec{t}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \vec{0}$

Propiedades del tensor de esfuerzos

Ecuación de equilibrio interno

Fuerza: $\begin{array}{l} \int_{\partial v'} t^* ds + \int_{v'} \rho \vec{b} dv = \int_{v'} \rho \vec{a} dv \\ \vec{t}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \vec{\vec{\sigma}} = \vec{t}^* \end{array}$ equilibrio en el contorno

En la base: $\hat{e}_j$:

$$\int_{\partial v'} n_i \sigma_{ij} ds + \int_{v'} \rho b_j dv = \int_{v'} \rho a_j dv$$

T. divergente: $\int_{\partial v} \vec{n} \vec{\vec{A}} ds = \int_{v} \nabla \cdot dv \Rightarrow \int \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} dv = \int_{\partial v} n_i$

$$\int_{\partial v'} n_i \sigma_{ij} ds = \int_{v'} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dv$$

$$\Rightarrow \int_{v'} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j - \rho a_j \right) dv = 0$$

Si $v^{'} \Rightarrow dv : \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho a_j \Leftrightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{b} = \delta \vec{a}}$

Si $\begin{array}{l} \vec{a} = 0: \text{ ecuación de equilibrio} \\ \boxed{\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{\text{b}} = 0} \end{array}$

Momentos/Equilibrio $\int_{\partial v'} \vec{x} \times \vec{t}^{(n)} ds + \int_{v'} \vec{x} \times \rho \vec{b} dv = 0$

T1) $\vec{\vec{\sigma}} = \vec{\vec{\sigma}}^T \Leftarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

***Ej)Presa prismática**

Ecuaciones de equilibrio (cauchy)

$$\mathbf{1}\begin{cases} \nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}+\rho\vec{b}=\vec{\vec{\sigma}}\cdot\nabla+\rho\vec{b}=\rho\vec{a} \quad \forall x\in V \\ \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho b_j=\dfrac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_i}+\rho b_j=\rho a_j \;\; i,j\in\{1,2,3\} \end{cases}$$

$$\mathbf{2}\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{\vec{\sigma}}=\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n}=\vec{t}^{\,*}(x,t):\forall x\in\partial V \\ n_i\sigma_{ij}=\sigma_{ji}n_i=\vec{t}_j^{\,*}(\vec{x},t) \quad i,j\in\{1,2,3\} \end{cases}$$

Ej) Dado un cuerpo en equilibrio estático, donde el campo del tensor de tensiones (de cauchy)en la dedo…

$$\sigma_{11}=6x_1^3+x_2^2 \quad ;\sigma_{12}=x_3^3$$
$$\sigma_{22}=12x_1^3+60 \quad ;\sigma_{23}=x_2$$
$$\sigma_{33}=18x_2^3+6x_3^3 \quad ;\sigma_{31}=x_1^2$$

Hallar el vector de fuerzas masizas en el punto (2,4,2)

T2) El campo de tensión de un m.c viene representados por: $\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 4x_1 \\ 2x_2 & 4x_1 & 1 \end{bmatrix}$

A) Despreciando las fuerzas masizas ¿Está el cuerpo en equilibrio?

B) Hallar el vector tensión (tracción) en el punto (1,2,3) según el plano

$$x_1+x_2+x_3=6 \quad \left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\right.$$

C) Determinar la proyección del vector de tensión según la dirección normal y tangencial del plano $x_1+x_2+x_3=6$

Ej) plano en el que las tracciones sean normales

Diagonalización: tensiones y direcciones principales

Valor principal de esfuerzo

$\vec{t}^{(p)} = \sigma_{px}\hat{n}^{(p)}$

$t_j^{(p)} = \sigma_{px} n_j^{(p)}$

Pero: $\vec{t}^{(p)} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \hat{n}^{(p)} \quad \therefore \quad t_j^{(p)} = \sigma_{ji} n_i^{(p)} \left\{ (2) \right.$

$(2)-(1): \vec{\vec{\sigma}} \cdot \hat{n}^{(p)} - \sigma_{(p)}\hat{n}^{(p)} = 0 \Rightarrow \left(\vec{\vec{\sigma}} - \mathrm{I}\sigma_{(p)} \right)\hat{n}^{(p)} = \vec{0}$

ecuación de autovalores $\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)} \right) n_i^{(p)} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{(p)} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_{(p)} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(p)} \\ n_2^{(p)} \\ n_3^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

3 Ecuaciones

4 Incognitas

Condición de normalización: $\hat{n}^{(p)} \cdot \hat{n}^{(p)} = 1$

$n_i^{(p)} n_i^{(p)} = 1$

Sin no trivial: $\det\left(\sigma_{ji} - \delta_{ji}\sigma_{(p)} \right) = 0$

Ecuación caracteristica del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{(p)}^3 - \mathrm{I}_1\sigma_{(p)}^2 + \mathrm{I}_2\sigma_{(p)} - \mathrm{I}_3 = 0$$

Raices:

$\sigma_{(1)} \rangle \sigma_{(2)} \rangle \sigma_{(3)}$: Valores principales del tensor de esfuerzos

$\mathrm{I}_{i:}$ **Variantes del tensor de esfuerzos:**

$$\mathrm{I}_i = tr\vec{\vec{\sigma}}, \mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\left\} \left(tr\vec{\vec{\sigma}} \right)^2 - tr\vec{\vec{\sigma}}^2 \right\} \mathrm{I}_3 = \det$$

principal $\left\{ \mathrm{I}_1 = \sigma_{kk}, \mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\left\{ \left(\sigma_{kk} \right)^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij} \right\}, \mathrm{I}_3 = \det(\sigma_{ij}) \right.$

$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \quad = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

- Cada valor principal $\sigma_{(p)}$ está asociado a una disección p.p dada por un vector

  $\hat{n}^{(p)} = n_1^{(p)}\hat{e}_1 + n_2^{(p)}\hat{e}_2 + n_3^{(p)}\hat{e}_3$

  $\tilde{x}_i$: sistema de ejes principales del tensor de esfuerzo

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} \qquad \vec{\vec{\sigma}} = \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_i \qquad \tilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{(2)}(i=i) \\ 0(i \neq i) \end{cases}$$

Nota: si $\sigma_1 \rangle \sigma_2 \rangle \sigma_3 \Rightarrow \tilde{e}_i = \hat{n}^{(i)}$

Ej) 3B $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Pa$ Estado tensional de un … graficado

Hallar los t. ppales y las direcciones donde se producen

T2) Si $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix}$ hallar los t. ppales y las direcciones p.p

Tensión media: $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}Tr\left(\vec{\vec{\sigma}}\right)$

Estado de T. Hidroestatico: Aquel en el que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 =: \sigma$

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sigma \, \vec{\vec{\mathrm{I}}}$$

$*\ \hat{n}_i^{(i)}$: constituye una base ortonormal

$$\Rightarrow \text{Matriz de tranformación de base: } A_{ij} = \hat{n}_j^{(1)} \begin{bmatrix} \hat{n}^{(1)} \\ \hat{n}^{(2)} \\ \hat{n}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1^{(1)} & \hat{n}_2^{(1)} & \hat{n}_3^{(1)} \\ \hat{n}_1^{(2)} & \hat{n}_2^{(2)} & \hat{n}_3^{(2)} \\ \hat{n}_1^{(3)} & \hat{n}_2^{(3)} & \hat{n}_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\vec{\sigma}}^p = \vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{A}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)-(2-\lambda)=0 \\ \qquad (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0 \\ \quad \lambda_1=2, \quad 1-\lambda=\pm 1 \Rightarrow \lambda_{1,3}=\Big\}\begin{matrix}2\\0\end{matrix} \\ \quad \tilde{\delta}_{ij}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix} pa \end{array}\right\} 2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=2$$

$$\begin{bmatrix}1-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -n_1+n_2=0 \\ n_1-n_2=0 \\ 2n_1^2+n_3^2=1 \\ n_1^2=\dfrac{1-n_3^2}{2} \end{array}$$

$$n_3=0 \Rightarrow n_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$A_3=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(3)} \\ n_2^{(3)} \\ n_3^{(3)}\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{array}{l} n_2+n_2=0 \\ n_3=0 \\ n_1^2+n_2^2=1 \\ 2n_1^2=1 \\ n_1^2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -{}^{1}1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Circulo de Mohr 3-D

Circulo de Mohr 2-D

Conocida 1 de las direcciones principale tomada como x_3 : Z

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tomando planos paralelos a $x_3\left(n_3 = 0\right)$

Reducción a 2 dimensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}\left(p, \hat{n}\right) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}(p, \hat{n}) = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \hat{n} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estado tensional sobre un plano

$$\hat{n}=\begin{bmatrix} c_\theta \\ s_\theta \end{bmatrix} \hat{n}=\begin{bmatrix} s_\theta \\ -c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}=\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{n}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\theta \\ s_\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_x c_\theta+\tau_{xy}s_\theta \\ \tau_{xy}c_\theta+\sigma_y s_\theta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\theta=\vec{t}\cdot\hat{n}=\sigma_x\cos^2\theta+2\tau_{xy}\cos\theta sen\theta+\sigma_y sen^2\theta$$

$$\tau_\theta=\vec{t}\cdot\hat{m}=\sigma_x sen\theta\cos\theta-\sigma_y sen\theta\cos\theta+\tau_{xy}\left[\sin^2\theta-\cos^2\theta\right]$$

T3) $\Rightarrow\begin{cases} \alpha_\theta=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\theta)+\tau_{xy}\sin(2\theta) \\ \tau_\theta=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\theta)-\tau_{xy}\cos(2\theta) \end{cases}$

Diagonalización del tensor de esfuerzos

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\alpha)-\tau_{xy}\cos(2\alpha)=0$$

$$\Rightarrow\tan(2\alpha)=\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sin(2\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(2\alpha)}}}=\pm\frac{\tau_{xy}}{\left|\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right|}$$

$$\cos(2\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\alpha)}}=\pm\frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{\left|\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right|}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha = \begin{cases} \sigma_i \; \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & : C + R \\ \sigma_i \; \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & : C - R \end{cases}$$

Problema inverso

$$C : \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y^2}{2}$$

$$R : \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \tau_{xy}^2}$$

$$* \left[\begin{array}{l} \sigma_\beta = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(2\beta) \\ \tau_\beta = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin(2\beta) \end{array} \right.$$

Circulo de Mohr en 2D (estado plano)

Circunferencia

$$(\sigma = \sigma_\theta, \tau = \tau_\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \\ \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De *:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(2\beta) \\ \tau = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin(2\beta) \end{array} \right\} \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

Circunferencia:

$$c = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right), R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$\downarrow$

A

$$\cos(2\beta) = \frac{\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} = \frac{\sigma - a}{R}, \sin(2\beta) = \frac{\tau}{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} = \frac{\tau}{R}$$

*Ej) $\exists_\alpha / \sigma_\alpha = 0$ Representar el estado de las tensiones